ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ ÁNH

TÍNH CHẤT MINIMAX CHO MÔĐUN MỞ RỘNG CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ ÁNH

TÍNH CHẤT MINIMAX CHO MÔĐUN MỞ RỘNG CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng

THÁI NGUYÊN - 2019

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 04 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Thị Ánh

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành vào tháng 04/2018 dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Hoàng. Tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, những bài học quý giá từ trang giấy và cả những bài học trong cuộc sống thầy dạy giúp tôi tự tin hơn và trưởng thành hơn nhiều.

Tôi xin cảm ơn Phòng Đào Tạo - Đại học Sư Phạm Thái nguyên đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành sớm khóa học.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới tất cả các thầy cô ở Đại học Thái Nguyên và các thầy ở Viện toán với những bài giảng đầy nhiệt thành và tâm huyết, xin cảm ơn các thầy cô đã luôn quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, tạo điều kiện cho tôi tham gia các buổi seminar và các lớp học ngoài chương trình.

Tôi xin cảm ơn tất cả các anh, em và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi nhiệt tình trong quá trình học và làm luận văn.

Tôi xin được gửi cảm ơn tới tất cả thành viên trong gia đình đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mục lục

Mở đầu

Năm 1986, H. Zoschinger (trong [6], [7]) đã giới thiệu một lớp môđun minimax khá thú vị: Một R-môđun M được gọi là *minimax* nếu tồn tại một môđun con hữu hạn sinh N của M sao cho M/N là R-môđun Artin; cũng trong [6], ông đã đưa ra một số điều kiện tương đương với tính chất minimax. Các khái niệm môđun $\mathfrak{a}$-minimax và môđun $\mathfrak{a}$-cominimax đưa ra bởi R. Naghipour và các đồng nghiệp ở bài báo [1] là một sự khái quát hóa của các môđun minimax và môđun $\mathfrak{a}$-cofinite. Một R-môđun M là $\mathfrak{a}$-*minimax* nếu chiều Goldie $\mathfrak{a}$-tương quan của bất kỳ môđun thương của M là hữu hạn. Nhắc lại rằng một R-môđun M được gọi là có *chiều Goldie* hữu hạn ($\operatorname{Gdim} M \leq \infty$) nếu M không chứa một tổng trực tiếp vô hạn các môđun con khác không của M, hay nói cách khác, bao nội xạ $E(M)$ của M phân tích được thành một tổng trực tiếp của hữu hạn các môđun con không phân tích được. Ngoài ra, một R-môđun M được coi là có *chiều Goldie* $\mathfrak{a}$-*tương quan* hữu hạn nếu chiều Goldie của môđun con $\mathfrak{a}$-xoắn $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ là hữu hạn. Ta đã biết rằng nếu M là môđun $\mathfrak{a}$-xoắn, thì M là $\mathfrak{a}$-minimax nếu và chỉ nếu M là minimax. Ngoài ra, ta nói rằng một R-môđun M là $\mathfrak{a}$-cominimax nếu giá của M chứa trong $V(\mathfrak{a})$ và $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$ là môđun $\mathfrak{a}$-minimax với mọi $i \geq 0$. Năm 2015, M. Sedghi-L. Abdi (trong bài báo [10]) đã chứng minh được rằng nếu $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$ là $\mathfrak{a}$-minimax với mọi $i \geq 0$ thì $M/\mathfrak{a}^n M$ là $\mathfrak{a}$-minimax với mọi $n \geq 0$. Và khá nhiều áp dụng của kết quả này được nghiên cứu đưa ra. Một trong số đó là chứng minh được sự tương đương giữa tính $\mathfrak{a}$-minimax của các R-môđun $\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$, $\operatorname{Tor}^R_i(R/\mathfrak{a}, M)$ và $H^i(x_1, \ldots, x_t; M)$ với mọi $i \geq 0$ với $x_1, \ldots, x_t$ là hệ sinh của iđean $\mathfrak{a}$. Sử dụng kết quả đó, họ đã chỉ ra rằng nếu $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ sao cho M là $\mathfrak{b}$-minimax và

$\mathrm{cd}(\mathfrak{b}, M) = 1$, thì các R-môđun $\mathrm{Ext}^j_R(L, H^i_{\mathfrak{a}}(M))$ là $\mathfrak{b}$-minimax với mọi $i \geq 0$ và mọi $j \geq 0$ (trong đó L là R-môđun hữu hạn sinh có giá nằm trong $V(\mathfrak{b})$). Do đó $H^i_{\mathfrak{a}}(M)/\mathfrak{b}^n H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là $\mathfrak{b}$-minimax với mọi $i \geq 0$ và mọi $n \geq 0$.

Mục đích của luận văn này là tìm hiểu và trình bày chứng minh chi tiết lại các kết quả trong bài báo [10] M. Sedghi and L. Abdi (2015), *Minimaxness properties of extension functors of local cohomology modules*, Inter. Electronic J. of Albegra, Vol 17, 94-104; và một phần bài báo [1] Azami J., Naghipour R. and Vakili B. (2009), *Finiteness properties of local cohomology modules for* $\mathfrak{a}$ - *minimax modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 137, 439-448. Các bài này nói về môđun minimax đối với một iđêan cho trước. Luận văn có bố cục gồm hai chương. Chương 1 trình bày những kiến thức chuẩn bị cần thiết về tập Ass, tập Supp, môđun Ext, Tor, môđun đối đồng điều địa phương, phức Koszul. Chương 2 dành để trình bày kết quả chính của luận văn về tính chất minimax cho môđun mở rộng của môđun đối đồng điều địa phương. Cụ thể, Mục 2.1 trình bày về một số khái niệm minimax, cominimax, chiều Goldie, chiều Goldie tương quan, sau đó trình bày một số bổ đề phụ trợ dẫn đến một kết quả chính ở mục này về điều kiện cho tính chất minimax của môđun (xem Định lý 2.1.9). Mục 2.2 dành để trình bày một áp dụng hiệu quả của định lý chính ở mục trước, cụ thể ta sẽ chứng minh chi tiết Định lý 2.2.1 về sự tương đương khi khảo sát tính chất $\mathfrak{a}$-minimax của các môđun $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)$, $\mathrm{Tor}(R/\mathfrak{a}, M)$ và môđun đối đồng điều Koszul $H^i(x_1, \ldots, x_t; M)$ với mọi $i \geq 0$. Tiếp đến ta trình bày một kết quả mở rộng nữa cho kết quả vừa nêu, cụ thể ta thu được Định lý 2.2.2. Mục cuối cùng trình bày kết quả nghiên cứu về sự thay đổi của tính chất $\mathfrak{a}$-cominimax của môđun khi ta chuyển vành cơ sở, cụ thể ta chứng minh chi tiết về nguyên lý chuyển vành cơ sở đối với tính chất minimax (xem Định lý 2.3.2). Sau đó ta trình bày nhiều hệ quả áp dụng của tính chất này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Ở chương này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán Noether có đơn vị. Các kiến thức ở chương này được trình bày dựa vào các cuốn sách [9], [2], [12].

1.1 Môđun Noether và môđun Artin

Môđun Noether là một trong những lớp môđun cơ bản nhất của Đại số giao hoán. Sau đây ta nhắc lại định nghĩa và một số tính chất của nó.

Bổ đề 1.1.1. *Cho R là một vành giao hoán và M là một R-môđun. Khi đó các mệnh đề sau tương đương.*

i) (Điều kiện hữu hạn sinh) Mọi môđun con của M là hữu hạn sinh.

ii) (Điều kiện dãy tăng) Nếu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \ldots \subseteq N_i \subseteq \ldots$ là dãy các môđun con của M, thì tồn tại $n \geq 1$ sao cho $N_i = N_n$ với mọi $i \geq n$;

iii) (Điều kiện tối đại) Mọi tập khác rỗng các môđun con của M đều có phần tử tối đại.

Định nghĩa 1.1.2. Một R-môđun M thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương ở Bổ đề 1.1.1 gọi là *môđun Noether*. Một vành giao hoán R được gọi là *vành Noether* nếu nó là R-môđun Noether.

Mệnh đề 1.1.3. *i) Cho dãy khớp ngắn các R-môđun*

$$0 \to M' \to M \to M" \to 0.$$

Khi đó M là R-môđun Noether nếu và chỉ nếu M' và $M"$ là các R-môđun Noether.

ii) Mỗi R-môđun hữu hạn sinh trên vành Noether R là một R-môđun Noether.

iii) Nếu M là một R-môđun Noether và S là một tập đóng nhân của R thì $S^{-1}M$ là một $S^{-1}R$-môđun Noether.

Tiếp theo ta xét khái niệm môđun Artin đó là một khái niệm đối ngẫu của môđun Noether.

Bổ đề 1.1.4. *Cho M là một R-môđun. Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

i) (Điều kiện dãy giảm) Nếu $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots \supseteq N_i \supseteq \ldots$ là dãy các môđun con của M, thì tồn tại $n \geq 1$ sao cho $N_i = N_n$ với mọi $i \geq n$;

ii) (Điều kiện cực tiểu) Mọi tập con khác rỗng các môđun con của M luôn có phần tử cực tiểu.

Định nghĩa 1.1.5. Một R-môđun M thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương ở Bổ đề 1.1.4 gọi là *môđun Artin*. Một vành giao hoán R được gọi là *vành Artin* nếu nó là R-môđun Artin.

Ta xét một số tính chất của môđun Artin.

Mệnh đề 1.1.6. *i) Cho dãy khớp ngắn các R-môđun*

$$0 \to M' \to M \to M" \to 0.$$

Khi đó M là R-môđun Artin nếu và chỉ nếu M' và $M"$ là các R-môđun Artin.

ii) Mỗi R-môđun hữu hạn sinh trên vành Artin R là một R-môđun Artin.

iii) Mỗi iđêan nguyên tố trong một vành Artin R là một iđêan cực đại.

1.2 Iđêan nguyên tố liên kết

Định nghĩa 1.2.1. Cho M là R-môđun và $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Khi đó $\mathfrak{p}$ được gọi là một *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại $0 \neq x \in M$ sao cho $(0 :_R x) = \mathfrak{p}$. Tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\operatorname{Ass} M$ hoặc $\operatorname{Ass}_R M$.

Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, ta kí hiệu là $V(\mathfrak{a})$ là tập được xác định bởi

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Sau đây là một vài tính chất của tập Ass.

Mệnh đề 1.2.2. *Cho M là R-môđun, N là môđun con của M, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, và $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R. Khi đó ta có*

i) $\operatorname{Ass}(0 :_M \mathfrak{a}) = \operatorname{Ass} M \cap V(\mathfrak{a})$.

ii) $\operatorname{Ass} N \subseteq \operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} N \cup \operatorname{Ass} M/N$.

iii) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ *nếu và chỉ nếu* $R/\mathfrak{p}$ *đẳng cấu với môđun con nào đó của* M.

Định nghĩa 1.2.3. Cho M là một R-môđun. *Tập giá* của M, kí hiệu là $\operatorname{Supp}_R M$ hoặc $\operatorname{Supp} M$, được xác định bởi

$$\operatorname{Supp}_R M = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Mệnh đề 1.2.4. *i) Cho dãy khớp môđun* $0 \to M' \to M \to M" \to 0$. *Khi đó*

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M' \cup \operatorname{Supp} M".$$